10Н

УДК 004.415.24, 004.83

Л.Л. Никитенко
Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, г. Киев
zvk140@ukr.net

О стойкости методов встраивания цифровой информации к атакам сглаживающими фильтрами

Рассмотрены общие свойства линейных сглаживающих фильтров в области Фурье и в пространственной области. Основное внимание уделено сохранению параметров квазилинейных и квазиплоских сигналов. Доказаны теоремы о сохранении близости квазилинейного сигнала к линейной функции и квазиплоского сигнала к функции плоскости. Получены верхние оценки разности оценок коэффициентов наклона линейной функции к оси абсцисс до и после работы сглаживающего фильтра.

Введение

В цифровой обработке изображений (ЦОС) класс операций, который соответствующим образом объединяет пиксели малой окрестности исходного изображения и формирует новое изображение, называется классом операций над соседними элементами [1]. Эти операции применяются при низкоуровневой обработке изображений и называются фильтрами. Дискретный оператор H формирования окрестностей изображения отображает матрицу размерностью MxN в саму себя операцией

$$G'_{m,n} = H(G_{m'-m,n'-n}), \ \forall[m',n'] \in L, \tag{1}$$

где L – дискретное множество точек, называемое окном или маской; $G_{m'-m,n'-n}; G'_{m,n}$ – матрица пикселей изображения размерностью MxN до и после применения фильтра.

Элементарная комбинация пикселей в окне задается умножением величины каждого пикселя в пределах маски фильтра на соответствующий весовой множитель маски и сложением полученных произведений по всей маске. Результат присваивается значению центрального пикселя:

$$g'_{m,n} = \sum_{m'=-r}^{r} \sum_{n'=-r}^{r} h_{m',n'} g_{m-m',n-n'}, \tag{2}$$

где M = N = 2r + 1, $h_{m',n'}$ – весовой коэффициент для элемента изображения $g_{m-m',n-n'}$, попадающего в маску с центром в точке с координатами (m,n).

Операция (2) эквивалентна операции дискретной свертки

$$g'_{m,n} = \sum_{m'=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} h_{m',n'} g_{m-m',n-n'}.$$

Развитие цифровой обработки сигналов основывалось на использовании дискретного преобразования Фурье периодических функций. При применении преобразования Фурье к конечному дискретному упорядоченному множеству, представляющему сигнал, это множество отождествляется с периодом бесконечной периодической функции. В одномерном случае бесконечное число раз справа и слева к исходной конечной последовательности добавляется та же самая последовательность. В результате полу-

чается бесконечная периодическая последовательность, один период которой включает всю исходную конечную последовательность.

Дискретное преобразование Фурье отображает матрицу изображения размерностью MxN в комплекснозначную матрицу той же размерности:

$$\hat{g}_{u,v} = \frac{1}{MN} \sum_{m'=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} g_{m,n} \exp(-\frac{2\pi imu}{M}) \exp(-\frac{2\pi inv}{N}),$$

где $\hat{g}_{u,v}$ – элемент матрицы изображения в области Фурье. В соответствии с теоремой о свертке в области Фурье свертка сводится к умножению:

$$G * H \leftrightarrow MN\hat{G}\hat{H} .$$

Коэффициент MN компенсирует усреднение по матрице изображения. Преобразование Фурье от маски свертки $\hat{H}$ называется передаточной функцией фильтра. В общем случае применение фильтров меняет и амплитуду, и фазу элементов изображения.

Целью данной работы является поиск сохраняющихся или мало изменяющихся параметров цифровых сигналов при обработке линейными сглаживающими фильтрами для создания стеганосистем, стойких к атакам сглаживания.

Общие свойства сглаживающих фильтров

При низкоуровневой обработке изображений с целью уменьшения влияния шума, неравномерной освещенности, неоднородного фона и т.д. было создано множество разнообразных фильтров, которые называются усредняющими или сглаживающими фильтрами [1]. В области Фурье передаточная функция линейного сглаживающего фильтра имеет четыре свойства, обеспечивающие как можно лучшее сохранение качества исходного изображения при уменьшении влияния высокочастотных элементов:

1) действительная, не вносятся изменения в фазу элементов изображения;

2) сохраняющая среднее значение, т.е. $\hat{h}_{0,0} = 1$;

3) изотропная, сглаживание одинаково во всех направлениях;

4) убывающая с ростом волнового числа (уменьшает влияние высокочастотных элементов).

Маска размером $(2R+1) \bullet (2R+1)$ с четной горизонтальной и вертикальной симметрией приводит к передаточной функции:

$$\hat{h}(k) = h_{00} + 2\sum_{n'=1}^{R} h_{0n'} \cos(n'\pi k_1) + 2\sum_{n'=1}^{R} h_{m'0} \cos(m'\pi k_2) + \\ + 4\sum_{m'=1}^{R}\sum_{n'=1}^{R} h_{m'n'} \cos(n'\pi k_1)\cos(m'\pi k_2), \quad (3)$$

где k_1 и k_2 – соответствующие волновые числа по горизонтали и вертикали.

Если сглаживающий фильтр применяется после того, как изображение было поделено на непересекающиеся блоки с размерами, совпадающими с размерами маски фильтра, то фазы элементов в области Фурье и нулевой элемент (среднее значение) останутся неизменными. Значит, в этом случае дополнительная информация, встроенная в нулевой элемент и в фазы элементов блока, не будет подвергаться искажению.

Можно сделать вывод, что методы, встраивающие дополнительную информацию в нулевой элемент и в фазы элементов блоков изображения в области Фурье, будут стойкими к атакам линейными сглаживающими фильтрами, если

1) размеры маски фильтра совпадают с размерами блоков, на которые разделялось изображение при встраивании дополнительной информации;

2) в пространственной области разделение изображения на блоки при применении сглаживающих фильтров совпадает с тем разделением на блоки, которое выполнялось при встраивании дополнительной информации.

Понятно, что перечисленные условия, обеспечивающие стойкость методов встраивания к подобным атакам, на практике трудно осуществимы. Поэтому целесообразно вернуться в пространственную область и рассмотреть работу сглаживающих фильтров с самого начала.

В пространственной области для сглаживающих фильтров выполняется условие $\sum_m \sum_n h_{mn} = 1$, из которого и получается условие $\hat{h}_{0,0} = 1$ в области Фурье. Это условие, как правило, выполняется и для нелинейных сглаживающих фильтров, например, для медианного фильтра [1]. Кроме того, остается обязательным и условие изотропности фильтра. В реальных линейных фильтрах условие изотропности всегда выполняется для вертикального и горизонтального направлений, а по другим направлениям к этому условию стараются максимально приблизиться. Далее рассматриваются только линейные сглаживающие фильтры.

Четные сглаживающие фильтры [1], в отличие от нечетных, не сдвигают элементы исходного изображения с их позиций в цифровой матрице сигнала. В данной работе будут рассматриваться только четные фильтры, применяемые для одно- и двумерных сигналов. В общем случае влияние линейного четного сглаживающего фильтра для одномерного сигнала имеет вид:

$$g_n' = h_0 g_n + \sum_{n'=1}^{r} h_{n'} (g_{n-n'} + g_{n+n'}) , \quad (4)$$

а для двумерного сигнала

$$\begin{aligned} g_{mn}' = h_{00} g_{mn} &+ \sum_{n'=1}^{r} h_{0n'} (g_{m,n-n'} + g_{m,n+n'}) + \sum_{m'=1}^{r} h_{m'0} (g_{m-m',n} + g_{m+m',n}) + \\ &+ \sum_{m'=1}^{r} \sum_{n'=1}^{r} h_{m'n'} (g_{m-m',n-n'} + g_{m-m',n+n'} + g_{m+m',n-n'} + g_{m+m',n+n'}). \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть во время работы сглаживающего фильтра происходит последовательная обработка всех пикселей исходного сигнала. Если сигнал описывается линейной функцией (в одномерном случае) или функцией плоскости (в двумерном случае), тогда сглаживающий линейный фильтр не изменит его значений. Кроме того, остаются неизменными и параметры (коэффициенты наклона к осям абсцисс и свободный член) линейных (плоских для двумерного сигнала) функций, описывающих значения величин пикселей в блоке.

Сглаживание квазилинейных сигналов

Пусть последовательность величин пикселей в одномерном сигнале $g = (g_0, g_1, .. g_{N-1})$ не является точной дискретной линейной функцией $f_i = Ki + C$, но близка к ней. Формально близость последовательности к линейной функции будем понимать в том смысле, что максимальное отклонение элементов последовательности отличается от соответствующего значения функции не более чем на заданную величину Δ:

$$|g_i - f_i| \le \Delta . \quad (6)$$

Такой сигнал будем называть квазилинейным. Применим линейный сглаживающий фильтр к последовательности элементов одномерного квазилинейного дискретного сигнала. Очевидно, что последовательность на выходе сглаживающего фильтра тоже будет квазилинейной. Тем не менее, этот факт требует четкого математического обоснования. Кроме того, необходимо оценить, насколько близкой к линейной функции будет выходная последовательность по сравнению с близостью к этой функции входной последовательности.

Теорема 1. Сглаживающий фильтр сохраняет близость квазилинейного сигнала к линейной функции, т.е.

$$\left|g_i - f_i\right| \le \Delta \Rightarrow \left|g_i' - f_i\right| \le \Delta, \quad (7)$$

где g_i, g_i' – элементы последовательности сигнала на входе и выходе сглаживающего фильтра соответственно.

Доказательство. Дополним последовательность $g = (g_1, g_2, ... g_N)$ справа и слева значениями функции $f_i = K_i + C$. Введем обозначение $\Delta_i = g_i - f_i$ и применим произвольный сглаживающий фильтр к полученной последовательности.

$$g_n' = h_0 g_n + \sum_{n'=1}^{r} h_{n'}(g_{n-n'} + g_{n+n'}) =$$

$$= h_0(f_n + \Delta_n) + \sum_{n'=1}^{r} h_{n'}(f_{n-n'} + f_{n+n'} + \Delta_{n-n'} + \Delta_{n+n'}) =$$

$$= h_0(Kn + C + \Delta_n) + \sum_{n'=1}^{r} h_{n'}(K(n-n') + K(n+n') + 2C + \Delta_{n-n'} + \Delta_{n+n'}) =$$

$$= h_0(Kn + C +) + \sum_{n'=1}^{r} h_{n'}(2Kn + 2C) + h_0\Delta_n + \sum_{n'=1}^{r} h_{n'}(\Delta_{n-n'} + \Delta_{n+n'}) =$$

$$= f_n + h_0\Delta_n + \sum_{n'=1}^{r} h_{n'}(\Delta_{n-n'} + \Delta_{n+n'}) = f_n + \Delta_n' \cdot$$

Оценим величину Δ_n', используя свойство сглаживающих фильтров $\sum_{m=-r}^{r} h_n = 1$ и неравенство (6):

$$\Delta_n' = h_0\Delta_n + \sum_{n'=1}^{r} h_{n'}(\Delta_{n-n'} + \Delta_{n+n'}) \le h_0\Delta + 2\sum_{n'=1}^{r} h_{n'}\Delta = \Delta(h_0 + 2\sum_{n'=1}^{r} h_{n'}) = \Delta .$$

Теорема доказана.

В формулировке и доказательстве теоремы 1 использованы известные параметры (коэффициент наклона K и свободный член C) линейной функции, к которой близка последовательность $g = (g_0, g_1, ... g_{N-1})$. На практике эти параметры чаще всего не известны. Более того, получателю часто не известна сама последовательность $g = (g_0, g_1, ... g_{N-1})$, ему известна последовательность на выходе сглаживающего фильтра $g' = (g'_0, g'_1, ... g'_{N-1})$. Значит, следующим шагом в исследовании влияния сглаживающих фильтров на квазилинейную последовательность должна быть оценка коэффициента наклона линейной функции (далее коэффициент наклона) до и после работы сглаживающего фильтра и их сравнение.

Оценим свободный член линейной функции по формуле

$$\widehat{C} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} g_n - K\frac{N-1}{2} = g_{cp} - K\frac{N-1}{2}, \quad (8)$$

а коэффициент наклона с помощью метода наименьших квадратов

$$\sum_{n=0}^{N-1}(Kn+\widehat{C}-g_n)^2 \to \min . \quad (9)$$

С учетом (8) выражение (9) можно переписать в виде

$$\sum_{n=0}^{N-1}(Kn+g_{cp}-K\frac{N-1}{2}-g_n)^2 \to \min . \quad (10)$$

Продифференцируем левую часть (10) по K и приравняем производную нулю, чтобы получить оценку $\widehat{K}$ в явном виде:

$$2\sum_{n=0}^{N-1}(\widehat{K}(n-\frac{N-1}{2})+g_{cp}-g_n)(n-\frac{N-1}{2})=0$$

$$\widehat{K}\sum_{n=0}^{N-1}(n-\frac{N-1}{2})^2=\sum_{n=0}^{N-1}(g_n-g_{cp})(n-\frac{N-1}{2}). \quad (11)$$

Поскольку [2]

$$\sum_{k=1}^{m}k=\frac{m(m+1)}{2} \text{ и } \sum_{k=1}^{m}k^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}, \quad (12)$$

то

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1}(n-\frac{N-1}{2})^2 &= \sum_{n=0}^{N-1}(n^2-2n\frac{N-1}{2}+(\frac{N-1}{2})^2)=\\ &=\frac{N(N-1)(2N-1)}{6}-(N-1)\frac{N(N-1)}{2}+N\frac{(N-1)^2}{4}=\\ &=\frac{N(N-1)}{12}(2(2N-1)-6(N-1)+3(N-1))=\\ &=\frac{N(N-1)(N+1)}{12}=\frac{N(N^2-1)}{12}.\end{aligned} \quad (13)$$

Правую часть уравнения (11) тоже можно упростить

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1}(g_n-g_{cp})(n-\frac{N-1}{2}) &= \sum_{n=0}^{N-1}g_n(n-\frac{N-1}{2})-g_{cp}\sum_{n=0}^{N-1}(n-\frac{N-1}{2})=\\ &=\sum_{n=0}^{N-1}g_n n-\frac{N-1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}g_n-g_{cp}\left(\frac{N(N-1)}{2}+g_{cp}N\frac{N-1}{2}\right)=\\ &=\sum_{n=0}^{N-1}g_n n-g_{cp}\frac{N(N-1)}{2}.\end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя (13) и (14) в (11), получаем окончательное выражение для оценки коэффициента наклона линейной функции, к которой близка последовательность $g=(g_0,g_1,...g_{N-1})$:

$$\widehat{K}=\frac{12}{N(N^2-1)}\left(\sum_{n=0}^{N-1}g_n n-g_{cp}\frac{N(N-1)}{2}\right). \quad (15)$$

Выражение (15) можно представить в другом виде, который более удобен для последующих исследований:

$$\widehat{K} = \frac{12}{N(N^2-1)}\sum_{n=0}^{N-1} g_n \left(n - \frac{(N-1)}{2} \right). \quad (16)$$

Оценка $\widehat{K}'$ вычисляется по (15) и (16), но вместо g_n подставляется g'_n. Найдем погрешность $\Delta_{\widehat{K}}$ полученной оценки $\widehat{K}'$ по отношению к оценке $\widehat{K}$:

$$\Delta_{\widehat{K}} = \left| \widehat{K}' - \widehat{K} \right| = \frac{12}{N(N^2-1)} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \left(g_n' - g_n \right) \left(n - \frac{(N-1)}{2} \right) \right|. \quad (17)$$

Под знаком суммы с правой стороны (17) в качестве сомножителя стоит величина $(g_n' - g_n)$, которую стоит рассмотреть отдельно:

$$(g_n' - g_n) = (Kn + C + \Delta_n' - (Kn + C + \Delta_n)) = \Delta_n - \Delta_n'.$$

Подставим в (17) полученное значение $(g_n' - g_n)$ и сделаем предположение, что N – четное число. (В цифровой стеганографии практически всегда выбираются последовательности с длиной 2^p, где p – целое число.)

$$\Delta_{\widehat{K}} = \frac{12}{N(N^2-1)} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \left(\Delta_n' - \Delta_n \right) \left(n - \frac{(N-1)}{2} \right) \right| =$$

$$= \frac{12}{N(N^2-1)} \left\| \left[\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} (\Delta_n' - \Delta_n) \left(n - \frac{(N-1)}{2} \right) + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} (\Delta_n' - \Delta_n) \left(n - \frac{(N-1)}{2} \right) \right] \right\| \le$$

$$\le \frac{12}{N(N^2-1)} \left| \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} (\Delta + \Delta) \left(\frac{(N-1)}{2} - n \right) \right| + \frac{12}{N(N^2-1)} \left| \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} (\Delta + \Delta) \left(n - \frac{(N-1)}{2} \right) \right| =$$

$$= \frac{24\Delta}{N(N^2-1)} \left| \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(\frac{(N-1)}{2} - n \right) \right| + \frac{24\Delta}{N(N^2-1)} \left| \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \left(k + \left(\frac{N}{2} - 1 \right) - \frac{(N-1)}{2} \right) \right| =$$

$$= \frac{24\Delta}{N(N^2-1)} \left(\frac{N}{2}\frac{(N-1)}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{N}{2} - 1 \right)\frac{N}{2} \right) + \frac{24\Delta}{N(N^2-1)} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{N}{2} + 1 \right)\frac{N}{2} - \frac{1}{2}\frac{N}{2} \right) =$$

$$= \frac{24\Delta N}{4N(N^2-1)} \left((N-1) - \left(\frac{N}{2} - 1 \right) + \left(\frac{N}{2} + 1 \right) - 1 \right) = \frac{6\Delta N}{(N^2-1)}.$$

Полученный результат сформулируем в виде леммы.

Лемма 1. Если параметры линейной функции $f_i = Ki + C$, описывающей дискретную квазилинейную последовательность $g = (g_0, g_1, \ldots g_{N-1})$, оцениваются по формулам:

$$\widehat{K} = \frac{12}{N(N^2-1)} \sum_{n=0}^{N-1} g_n \left(n - \frac{(N-1)}{2} \right),$$

$$\widehat{C} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g_n - \widehat{K} \frac{N-1}{2}$$

и $\left|g_n - (\widehat{K}n + \widehat{C})\right| \le \Delta$, тогда

$$\Delta_{\widehat{K}} \le \frac{6\Delta N}{(N^2 - 1)}. \tag{18}$$

Из (18) видно, что при $N \to \infty$ $\Delta_{\widehat{K}} \to 0$. В частности, при $N = 8$ $\Delta_{\widehat{K}} = \frac{48}{63}\Delta \approx 0{,}764\Delta$, а при $N = 16$ $\Delta_{\widehat{K}} = \frac{96}{255}\Delta \approx 0{,}38\Delta$.

Сглаживание квазиплоских сигналов

По аналогии с квазилинейными сигналами введем понятие квазиплоских дискретных сигналов, т.е. двумерных дискретных сигналов, в которых значения пикселей g_{mn} удалены не более чем на величину Δ от соответствующих значений плоской дискретной функции f_{mn}:

$$f_{mn} = K_1 m + K_2 n + C, \tag{19}$$

$$\left|g_{mn} - f_{mn}\right| \le \Delta. \tag{20}$$

Теорема 2. Сглаживающий фильтр сохраняет близость квазиплоского сигнала к плоской дискретной функции, т.е.

$$\left|g_{mn} - f_{mni}\right| \le \Delta \Rightarrow \left|g'_{mn} - f_{mn}\right| \le \Delta, \tag{21}$$

где g_{mn}, g'_{mn} – элементы сигнала на входе и выходе сглаживающего фильтра соответственно.

Доказательство. Дополним прилежащие области к множеству элементов сигнала $G = \{g_{mn}\}$ значениями функции $f_{mn} = K_1 m + K_2 n + C$. Введем обозначение

$$\Delta_{mn} = g_{mn} - f_{mn} \tag{22}$$

и применим произвольный сглаживающий фильтр H к полученному множеству элементов сигнала:

$$g'_{mn} = H\{f_{mn} + \Delta_{mn}\} = f_{mn} + \Delta'_{mn}, \tag{23}$$

где в соответствии с (5)

$$\Delta'_{mn} = h_{00}\Delta_{mn} + \sum_{n'=1}^{r} h_{0n'}(\Delta_{m,n-n'} + \Delta_{m,n+n'}) + \sum_{m'=1}^{r} h_{m'0}(\Delta_{m-m',n} + \Delta_{m+m',n}) +$$
$$+ \sum_{n'=1}^{r}\sum_{m'=1}^{r} h_{m'n'}(\Delta_{m-m',n-n'} + \Delta_{m-m',n+n'} + \Delta_{m+m',n-n'} + \Delta_{m+m',n+n'}).$$

Верхнюю оценку отклонения элементов сглаженного сигнала от соответствующих значений плоской дискретной функции можно получить, используя неравенство $\left|\Delta_{mn}\right| \le \Delta$, которое тождественно неравенству (20):

$$\Delta'_{mn} \le h_{00}\Delta + \sum_{n'=1}^{r} h_{0n'} 2\Delta + \sum_{m'=1}^{r} h_{m'0} 2\Delta + \sum_{n'=1}^{r}\sum_{m'=1}^{r} h_{m'n'} 4\Delta = \Delta \sum_{n'=-r}^{r}\sum_{m'=-r}^{r} h_{m'n'} = \Delta.$$

Теорема доказана.

Теорема 1 является частным случаем теоремы 2, но она может иметь большое значение в теории использования аудиосигналов, поэтому ее доказательство было приве-

дено в полном объеме. Кроме того, последовательность действий в доказательстве теоремы 1 позволяет сократить последовательность действий при доказательстве теоремы 2 и облегчает понимание смысла последовательности тождеств (23).

Оценки коэффициентов наклона K_1 и K_2 плоской функции и свободного члена C получим с помощью метода наименьших квадратов:

$$\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}(K_1 m + K_2 n + C - g_{mn})^2 \to \min . \quad (24)$$

Чтобы оценить C, продифференцируем (24) по C и приравняем производную нулю:

$$\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}(K_1 m + K_2 n + C - g_{mn}) = 0 ,$$

$$\widehat{C} = \frac{1}{N^2}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} g_{mn} + (K_1 + K_2)\frac{(N-1)}{2} . \quad (25)$$

Иначе это равенство можно записать, используя среднее значение элементов двумерного сигнала g_{cp}:

$$\widehat{C} = g_{cp} - (K_1 + K_2)\frac{(N-1)}{2} . \quad (26)$$

Подставим оценку $\widehat{C}$ в (24) и снова продифференцируем (24) по K_1 и K_2. Приравняем производные нулю и решим полученную систему равенств, чтобы найти оценки K_1 и K_2

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\left(K_1\left(m - \frac{(N-1)}{2}\right) + K_2\left(n - \frac{(N-1)}{2}\right) + g_{cp} - g_{mn}\right)\left(m - \frac{(N-1)}{2}\right) = 0 \\ \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\left(K_1\left(m - \frac{(N-1)}{2}\right) + K_2\left(n - \frac{(N-1)}{2}\right) + g_{cp} - g_{mn}\right)\left(n - \frac{(N-1)}{2}\right) = 0 \end{cases} . \quad (27)$$

Там, где это возможно, вынесем за знак суммы постоянные величины:

$$\begin{cases} K_1 N\sum_{m=0}^{N-1}\left(m - \frac{(N-1)}{2}\right)^2 + K_2\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\left(n - \frac{(N-1)}{2}\right)\left(m - \frac{(N-1)}{2}\right) = \\ = \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}(g_{mn} - g_{cp})\left(m - \frac{(N-1)}{2}\right) \\ K_2 N\sum_{m=0}^{N-1}\left(n - \frac{(N-1)}{2}\right)^2 + K_1\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\left(n - \frac{(N-1)}{2}\right)\left(m - \frac{(N-1)}{2}\right) = \\ = \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}(g_{mn} - g_{cp})\left(n - \frac{(N-1)}{2}\right). \end{cases}$$

Чтобы упростить полученную систему, воспользуемся равенствами (12) и равенством $\sum_{m=0}^{N-1}\left(m - \frac{(N-1)}{2}\right) = 0$:

$$\begin{cases} K_1\frac{N^2\left(N^2 - 1\right)}{12} = \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} g_{mn}\left(m - \frac{(N-1)}{2}\right) \\ K_2\frac{N^2\left(N^2 - 1\right)}{12} = \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} g_{mn}\left(n - \frac{(N-1)}{2}\right) \end{cases} ,$$

или

$$\begin{cases} \widehat{K}_1 = \dfrac{12}{N^2\left(N^2-1\right)}\sum\limits_{m=0}^{N-1}\sum\limits_{n=0}^{N-1} g_{mn}\left(m-\dfrac{(N-1)}{2}\right) \\ \widehat{K}_2 = \dfrac{12}{N^2\left(N^2-1\right)}\sum\limits_{m=0}^{N-1}\sum\limits_{n=0}^{N-1} g_{mn}\left(n-\dfrac{(N-1)}{2}\right) \end{cases}. \qquad (28)$$

Из представления (28) видно, что оценки коэффициентов наклона плоской функции напоминают оценку коэффициента наклона в линейном случае, но добавляется усреднение по второй координате.

В общем виде, как и следовало ожидать, выражения для $\widehat{K}_1$ и $\widehat{K}_2$ совпадают, поэтому достаточно сравнить оценки одного коэффициента, например $\widehat{K}_1$, до и после работы сглаживающего фильтра. Оценивание $\widehat{\Delta}_{K1}$ проведем по аналогии с исследованиями в случае одномерного сигнала:

$$\widehat{\Delta}_{K1} = \left|\widehat{K}_1 - \widehat{K}_1^{'}\right| = \left|\frac{12}{N^2(N^2-1)}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}(g_{mn}-g_{mn}^{'})\left(m-\frac{N-1}{2}\right)\right| \le$$

$$\le \frac{12}{N^2(N^2-1)}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\left|\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1}(g_{mn}-g_{mn}^{'})\left(m-\frac{N-1}{2}\right)\right| + \left|\sum_{m=\frac{N}{2}}^{N-1}(g_{mn}-g_{mn}^{'})\left(m-\frac{N-1}{2}\right)\right|\right].$$

Поскольку

$$g_{mn} - g_{mn}^{'} = f_{mn} + \Delta_{mn} - H(f_{mn} + \Delta_{mn}) = \Delta_{mn} - \Delta_{mn}^{'} \le 2\Delta ,$$

то

$$\widehat{\Delta}_{K1} \le \frac{24\Delta}{N^2(N^2-1)}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\left|\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1}\left(m-\frac{N-1}{2}\right)\right| + \left|\sum_{m=\frac{N}{2}}^{N-1}\left(m-\frac{N-1}{2}\right)\right|\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}\frac{6\Delta}{(N^2-1)} = \frac{6N\Delta}{(N^2-1)}.$$

Выражение для верхней оценки $\widehat{\Delta}_{K1}$ для двумерного сигнала совпадает с выражением для верхней оценки погрешность $\Delta_{\widehat{K}}$ для одномерного сигнала.

Результат сформулируем в виде леммы.

Лемма 2. Если параметры плоской дискретной функции $f_{mn} = K_1 m + K_2 n + C$, описывающей дискретное квазиплоское множество $G_{mn} = \{g_{mn}\}$, оцениваются по формулам

$$\begin{cases} \widehat{K}_1 = \dfrac{12}{N^2(N^2-1)}\sum\limits_{n=0}^{N-1}\sum\limits_{m=0}^{N-1} g_{mn}(m-\dfrac{(N-1)}{2}) \\ \widehat{K}_2 = \dfrac{12}{N^2(N^2-1)}\sum\limits_{m=0}^{N-1}\sum\limits_{n=0}^{N-1} g_{mn}(n-\dfrac{(N-1)}{2}) \end{cases},$$

$$\widehat{C} = \frac{1}{N^2}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} g_{mn} - (K_1 + K_2)\frac{(N-1)}{2},$$

и $\left|g_{mn}-(\widehat{K}_1 m+\widehat{K}_2 n+\widehat{C})\right|\le\Delta$, тогда различие $\widehat{\Delta}_{Ki}$, $i=\{1;2\}$ между оценками коэффициента K_i до и после обработки сглаживающим фильтром ограниченно согласно выражению:

$$\widehat{\Delta}_{Ki}\le\frac{6\Delta N}{(N^2-1)}. \quad (29)$$

Выводы

В работе изучалась ЦОС сглаживающими фильтрами элементов и параметров сигналов в случаях одно- и двумерных сигналов. Были рассмотрены общие свойства линейных сглаживающих фильтров в области преобразования Фурье. Основное внимание уделялось фильтрам с четной горизонтальной и вертикальной симметрией, поскольку их применение не вызывает смещения сигналов в пространственной области.

В пространственной области для сигналов, которые можно считать линейными в случае одномерных сигналов или плоскими в случае двумерных, были доказаны теоремы о сохранении параметров линейности (плоскости) при применении линейных сглаживающих фильтров. Кроме того, в обоих случаях были получены верхние оценки отклонения оценок коэффициентов наклона, рассчитанных после применения сглаживающего фильтра, от оценок, рассчитанных до применения сглаживающего фильтра. Оценивание коэффициентов наклона проводилось методом наименьших квадратов.

Исследования позволяют сделать вывод, что если сглаживание будет производиться в области Фурье с заранее известными блоками, то для встраивания секретной информации можно использовать нулевые элементы блока и фазы остальных элементов. При сглаживании в пространственной области возможно встраивание дополнительной информации в коэффициенты наклона линейных функций, описывающих квазилинейный сигнал, и в коэффициенты наклона функций плоскости, описывающих квазиплоский сигнал. При этом следует учитывать погрешности, возникающие при определении коэффициентов наклона получателем после применения сглаживающих фильтров.

Литература

1. Яне Б. Цифровая обработка изображений / Б. Яне. – Москва : Техносфера, 2007. – 584 с.
2. Корн Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – Москва : Наука, 1978. – 832 с.

Л.Л. Никитенко
Про стійкість методів вкраплення цифрової інформації щодо атак згладжуючими фільтрами
Розглядалися загальні властивості лінійних згладжуючих фільтрів в області Фур'є та у просторовій області. Основна увага приділена збереженню параметрів квазілінійних і квазіплоских сигналів. Доведено теореми про збереження близькості квазілінійного сигналу до лінійної функції та квазіплоского сигналу до функції площини. Отримано верхні оцінки різниці оцінок коефіцієнтів нахилу до та після роботи згладжуючого фільтра.

L.L. Nikitenko
On the Stability of the Hiding Methods of the Digital Message with Respect to Smoothing Filters
The paper devoted to the digital signal processing methods research by smoothing filters. General properties of line smoothing filters were examined in the Fourier domain and in the spatial domain. Generally, characteristics reservation of the quasilinear signals and quasiplanar signals we attended. The theorems about reservation of the quasilinear signal proximity to the linear function and quasiplanar signal proximity to the plane function were proved. The upper bounds of the differences between linear function inclination coefficient estimations to the abscissa axes before and after the smoothing filter action were resulted.

Статья поступила в редакцию 12.05.2009.